十分性、KMS条件及び相互情報量の作用素代数による研究 (作用素環の研究とその応用)

大矢, 雅則

数理解析研究所講究録
356巻 1979年 24-39

十分性、KMS条件及び相互情報量の作用素代数による研究。

東京理科大学　大矢雅則

これは、日合文雄、塚田真両氏と筆者とによる共同研究の概要である。

十分性の概念は、Halmos と Savage によって導入され、以後統計学の分野において、非常に有力な武器のひとつとなってきている。この概念は、測度論的には、次のように定式化される。$(X, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ を確率空間とすると、σ-代数 $\mathcal{A}$ の部分代数 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}$ に対して十分であるとは、任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{B}$-可測函数 f_A が存在して、

$$f_A = p(A|\mathcal{B}) \qquad a.e.[p] \quad \text{for } \forall p \in \mathcal{P}$$

となることである。ここで $p(A|\mathcal{B})$ は A の p と $\mathcal{B}$ に関する条件付き確率である。

この十分性の概念は、1960年頃、梅垣氏によって、σ-finite 且 finite な v.N alg. の上へ拡張された。我々は、一般の v.N alg. の上へこの概念を拡張し、v.N.alg. の解析に重要な道具となってきているKMS状態、時間不変な状態、

Relative Entropy（相互情報量）等と十分性の関連を考察した。

§1　十分性と状態

$\mathcal{N}$を Hilbert 空間$\mathcal{H}$に作用する恒等元 I をもつ v.N. alg. とし、$\mathcal{M}$をその部分代数($\ni I$)とする。又、$\mathfrak{S}$を$\mathcal{N}$上の全ての normal 状態の集合とし、$\mathcal{S}$を$\mathfrak{S}$の部分集合とする。

よく知られているように、各$\varphi \in \mathfrak{S}$に対して、所謂 modular automorphism σ_t^{φ}が存在して、それに関して、φは$\beta = 1$で、KMS 条件を満している。

$\mathcal{N}$から$\mathcal{M}$への条件付き期待値を$E_{\varphi}(\cdot|\mathcal{M})$（$\varphi$に関する）と記すと、$E_{\varphi}(\cdot|\mathcal{M})$が存在する必要且十分条件は、$\sigma_t^{\varphi}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$であることが竹崎氏によって示されている。

このとき、

<定義>

(1) 各$\varphi \in \mathcal{S}$に対して、$E_{\varphi}(\cdot|\mathcal{M})$が存在して、すべての$A \in \mathcal{N}$に対して、$\mathcal{E}(A) = E_{\varphi}(A|\mathcal{M})$ a.e. $[\varphi]$ となる $\mathcal{E}(A) \in \mathcal{M}$が存在するとき、$\mathcal{M}$は$\mathcal{S}$に対して十分であるという。

(2) $\mathcal{M}$が$\mathcal{S}$に対して十分であり、任意の$\mathcal{S}$に対して十分である$\mathcal{N}$の部分 v.N. 代数が$\mathcal{M}$を含むとき$\mathcal{M}$を最小且十分であるという。(minimal sufficient)

状態 φ によって dominate される状態の集合を $\mathfrak{S}(\varphi)$ で表わす。すなわち、

$$\mathfrak{S}(\varphi) \equiv \{\psi \in \mathfrak{S} \mid \psi \leq c\varphi \quad \text{for some } c > 0\}.$$

又、$\psi \in \mathfrak{S}$ が $\varphi \in \mathfrak{S}$ に対して絶対連続 (i.e. $\varphi(A^*A) = 0 \Rightarrow \psi(A^*A) = 0$) であるとき、$\psi \ll \varphi$ と表わすことにする。

(Lemma 1)

$\psi \ll \varphi$ のとき、($\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$)

$\mathfrak{M}$ sufficient for $\{\varphi, \psi\} \Longleftrightarrow \exists E_\varphi(\ \mid \mathfrak{M})$, $\psi = \psi \circ E_\varphi$

が容易に示される。

以下のギロンでは、簡単のため、<u>$\varphi \in \mathfrak{S}$ を faithful</u> なものと仮定しよう。このとき、任意の $\psi \in \mathfrak{S}$ に対して、$\psi \ll \varphi$ となる。

(Lemma 2)

$E_\varphi(\ \mid \mathfrak{M})$ が存在して、$\psi \in \mathfrak{S}(\varphi)$ が $\psi(A) = \varphi(hAh)$, $h \in \mathfrak{N}_+$ で与えられるとき、

$\mathfrak{M}$ sufficient for $\{\varphi, \psi\} \Longleftrightarrow h \in \mathfrak{M}$

(Proof)

$$(\Leftarrow): \quad \psi(A) = \varphi(hAh) = \varphi(E_\varphi(hAh \mid \mathfrak{M}))$$

$$= \varphi(hE_\varphi(A \mid \mathfrak{M})h) = \psi(E_\varphi(A \mid \mathfrak{M})) \qquad \forall A \in \mathfrak{N}$$

従って、Lemma 1 より $\mathcal{M}$ は $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分である。

$(\Rightarrow)$: $\psi(A) = \varphi(kAk)$, $k \in \mathcal{M}_+$, $A \in \mathcal{M}$ と表わせる。

$\mathcal{M}$ が $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分であることより、

$$\psi(A) = \psi(E_\varphi(A|\mathcal{M})) = \varphi(k E_\varphi(A|\mathcal{M}) k)$$

$$= \varphi(E_\varphi(kAk|\mathcal{M})) = \varphi(kAk) \quad , A \in \mathcal{N}$$

$h \in \mathcal{N}_+$ の一意性より $h = k$。 $\therefore h \in \mathcal{M}$ ∎

7. 次のような事実が容易に示される。

(1°) $\mathcal{M}$ が $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分であるとき、

$\mathcal{N}$ 上で $\varphi = \psi \iff \mathcal{M}$ 上で $\varphi = \psi$.

(2°) $\mathcal{M}$ が $\mathcal{S}$ に対して十分 $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_1$ $(\supset \mathcal{M})$ が $\mathcal{S}$ に対して十分。

(3°) 仮定したように、$\varphi \in \mathcal{S}$ が faithful のとき、

$\mathcal{M}$ が $\mathcal{S}$ に対して十分 $\iff$ $\mathcal{M}$ が任意の pair $\{\varphi, \psi\}$

$(\forall \psi \in \mathcal{S})$ に対して十分。

v.N.alg. $\mathcal{N}$ の center を $\mathfrak{Z} \equiv \mathcal{N} \cap \mathcal{N}'$, centralizer ($\varphi$ に関する) を $Z_\varphi \equiv \{A \in \mathcal{N} \mid \varphi(AB) = \varphi(BA) \quad \forall B \in \mathcal{N}\}$ とすると、

(Theorem 3)

Z_φ は $I(\varphi) \equiv \{\psi \in \mathfrak{S} \mid \psi \circ \sigma_t^\varphi = \psi\}$ に対して

minimal sufficient である。

(Sketch of Proof)

$\sigma_t^{\varphi}(Z_\varphi)=Z_\varphi \Rightarrow \exists E_\varphi(\cdot|Z_\varphi)$

$\psi\in I(\varphi)$ に対して、$\exists h>0$ s.t. $h\eta Z_\varphi$ 且

$\psi(A)=\varphi(hAh)$, $A\in\mathfrak{M}$.

$h=\int_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ (spectral resolution)

$h_n\equiv\int_0^n \lambda\, de(\lambda) \in Z_\varphi$

とおくと、$\varphi(h_n A h_n)\longrightarrow\varphi(hAh)$ as $n\to\infty$ より

$\psi(E_\varphi(A|Z_\varphi))=\psi(A)$, $A\in\mathfrak{M}$ が示される。

故に、Z_φ は $I(\varphi)$ に対して十分である。

Z_φ の最小性の証明：$\mathfrak{N}$ を $I(\varphi)$ に対して十分な v.N. 部分代数とする。このとき、$\varphi(h^2)=1$ となる $h\in Z_\varphi$ に対して、$\psi(A)\equiv\varphi(hAh)$ と ψ を定めると、$\psi\in I(\varphi)\cap\mathfrak{S}(\varphi)$ がわかる。従って (Lemma 2) より $h\in\mathfrak{N}$ $\therefore Z_\varphi\subset\mathfrak{N}$ ■

(Theorem 4)

$\beta=1$ で σ_t^{φ} に関して KMS 条件を満す状態の集合を $K(\varphi)$ とすると、$\mathfrak{Z}$ は $K(\varphi)$ に対して minimal sufficient である。

(Proof)

$\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{Z})=\mathfrak{Z} \Rightarrow \exists E_\varphi(\cdot|\mathfrak{Z})$

$\psi\in K(\varphi)$ に対して、$\exists h>0$ s.t. $h\eta\mathfrak{Z}$ 且

$\psi(A)=\varphi(hAh)$

Theorem 3 の証明と同様にして. $\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{Z}))=\psi(A)$ が示せる.

$\mathfrak{Z}$ の最小性の証明: $\mathfrak{M}$ を $K(\varphi)$ に対して十分な v.N. 部分代数とする。$\varphi(h^2)=1$ なる $h\in\mathfrak{Z}$ に対して.

$\psi(A)\equiv\varphi(hAh)$ と ψ を定めると. $\psi\in\mathfrak{S}(\varphi)$ で且 $\varphi\in K(\varphi)$ より $\psi\in K(\varphi)$ が示せる。 ■

(Theorem 5)

$\psi\in I(\varphi) \iff Z_\varphi$ は $\{\varphi,\psi\}$ に対して十分.

(Proof)

$(\Rightarrow)$: Theorem 3.

$(\Leftarrow)$: $\psi(\sigma_t^\varphi(A))=\psi(E_\varphi(\sigma_t^\varphi(A)|Z_\varphi))$

これが、$\psi(\sigma_t^\varphi(E_\varphi(A|Z_\varphi)))$ に等しくなることがわかるので. $\psi(\sigma_t^\varphi(A))=\psi(A)$, $A\in\mathfrak{M}$. $\therefore\ \psi\in I(\varphi)$ ■

(Theorem 6)

$\psi\in K(\varphi) \iff \mathfrak{Z}$ は $\{\varphi,\psi\}$ に対して十分。

(Proof)

$(\Rightarrow)$: Theorem 4.

$(\Leftarrow)$: $\mathfrak{Z}\subset Z_\varphi \Rightarrow$ Theorem 5 より $\psi\in I(\varphi)$

$\Rightarrow \exists h>0$ s.t. $h\,\eta\,Z_\varphi$ 且 $\psi(A)=\varphi(hAh)$.

又. 任意の $A\in\mathfrak{Z}$ に対して. $\exists\rho\in\mathcal{L}^1(\mathfrak{Z};\varphi)$ s.t.

$\psi(A) = \varphi(\rho A)$.

ここで、$\mathfrak{Z}$が$\{\varphi, \psi\}$に対して十分であることより、Lemma 1 と少しの計算の後

$$\psi(A) = \varphi(\rho A) \quad , \quad A \in \mathfrak{M}$$

が示される。 $\therefore \; h^2 = \rho \quad \Rightarrow \quad h \,\eta\, \mathfrak{Z}$

今、$S(h)$をhの support projection とすると、

$$\psi(A) = \begin{cases} \varphi(hAh) & \text{on } S(h)\mathfrak{M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

故に、 $\sigma_t^{\psi}(A) = \sigma_t^{\varphi}(h^{2it} A h^{-2it}) = \sigma_t^{\varphi}(A) \quad , \; A \in \mathfrak{M}$

よって $\psi \in K(\varphi)$ ■

これらの結果から、次のよく知られた事実がわかる。

(a) $\mathfrak{M}$ が factor $\Longleftrightarrow$ $K(\varphi) = \{\varphi\}$

(b) σ_t^{φ} が ergodic $\Longleftrightarrow$ $I(\varphi) = \{\varphi\}$.

§2. 十分性と相互情報量 (Relative Entropy).

しばらく、$\mathfrak{M}$を有限次元の v.N. alg. としよう。そのとき、状態 $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$ に対して、density matrices $\rho_\varphi, \rho_\psi \in \mathfrak{M}_+$ が存在して、$\varphi(A) = \tau(\rho_\varphi A)$, $\psi(A) = \tau(\rho_\psi A)$ と書ける。ここでτは$\mathfrak{M}$上の trace である。

このとき、φに関するψの Relative entropy $S(\psi|\varphi)$ は

$$S(\psi|\varphi) = \tau(\rho_\psi \log \rho_\psi - \rho_\psi \log \rho_\varphi)$$

で与えられ、これは φ が faithful のときつねに有限である。

又、φ, ψ を $\mathcal{M}$ に制限したものに対する Relative Entropy は

$$S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) = \tau(\bar{\rho}_\psi \log \bar{\rho}_\psi - \bar{\rho}_\psi \log \bar{\rho}_\varphi)$$

で与えられる。ここで $\bar{\rho} = E_\tau(\rho|\mathcal{M})$.

(Theorem 7)

$$\|\psi - \varphi\| \leqq \sqrt{2S(\psi|\varphi)}$$

(Proof)

$\rho_\psi - \rho_\varphi$ の positive part への support projection を

$e \equiv s(\rho_\psi - \rho_\varphi)^+$ とし、$\alpha \equiv \tau(\rho_\varphi e)$, $\beta \equiv \tau(\rho_\psi e)$ とおくと、$0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$。更に、

$$\|\psi - \varphi\| = \tau(|\rho_\psi - \rho_\varphi|) = 2(\beta - \alpha)$$

ここで、$\mathcal{M} = \mathbb{C}e + \mathbb{C}e^\perp$ と定めると、

$$E_\tau(\rho|\mathcal{M}) = \frac{\tau(\rho e)}{\tau(e)} e + \frac{\tau(\rho e^\perp)}{\tau(e^\perp)} e^\perp$$ となる。

Relative Entropy の monotonicity と少々の計算により、

$$S(\psi|\varphi) \geqq S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi) = \beta \log \frac{\beta}{\alpha} + (1-\beta) \log \frac{1-\beta}{1-\alpha}$$

$$\geqq \frac{1}{2}\{2(\beta-\alpha)\}^2$$

となる。よって $\sqrt{2S(\psi|\varphi)} \geqq \|\psi - \varphi\|$ ■

(Theorem 8)

$\mathcal{M} \subset Z_\varphi$, $\psi' = \psi \circ E_\varphi$ のとき.

$S(\psi|\psi') = S(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi)$, よって.

$\|\psi' - \psi\| \leq \sqrt{2S(\psi|\psi')}$

(Proof)

任意の $A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M}$ に対して.

$$\tau(\rho_\varphi AB) = \varphi(AB) = \varphi(E_\varphi(A|\mathcal{M})B) = \tau(\rho_\varphi E_\varphi(A|\mathcal{M})B)$$

$$= \tau(\bar{\rho}_\varphi E_\varphi(A|\mathcal{M})B)$$

$$\therefore \quad E_\tau(\rho_\varphi A|\mathcal{M}) = \bar{\rho}_\varphi E_\varphi(A|\mathcal{M})$$

φ が faithful であることより、少しの計算を行なうと.

$\rho_{\psi'} = \bar{\rho}_\psi \bar{\rho}_\varphi^{-1} \rho_\varphi$ がわかる。 (ここで $\psi'(A) = \tau(\rho_{\psi'}A)$)

更に, $\mathcal{M} \subset Z_\varphi$ より. $\rho_\varphi \in \mathcal{M}'$ が出る.

従って. $[\rho_\varphi, \bar{\rho}_\varphi] = 0$, $[\bar{\rho}_\psi, \rho_\varphi] = 0$

故に.

$$S(\psi|\psi') = \tau(\rho_\psi \log \rho_\psi - \rho_\psi(\log \bar{\rho}_\psi - \log \bar{\rho}_\varphi + \log \rho_\varphi))$$

注意深い計算の後. これは.

$S(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}}(\psi|\varphi)$ に等しいことがわかる。 ∎

これらの結果より.

(Corollary 9)

(a) $\mathcal{M} \subset Z_\varphi$, $\psi \in \mathfrak{S}$ のとき.

$\mathfrak{M}$ が $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分 $\Leftrightarrow S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi)$

(b) $\psi \in I(\varphi) \Leftrightarrow S_{Z_\varphi}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi)$

(c) $\psi \in K(\varphi) \Leftrightarrow S_{\mathfrak{Z}}(\psi|\varphi) = S(\psi|\varphi)$

が容易に証明される。

以上の結果は、荒木氏によって、一般の v.N. alg. に対しても成立することが、筆者に示された。すなわち、$\mathcal{N}$ を v.N. alg. とし、$S(\psi|\varphi) = -\langle \Psi, \log \Delta_{\Phi,\Psi} \Psi \rangle$ とすればよい。ここで Ψ, Φ は ψ, φ に対する cyclic, separating vectors であり、$\Delta_{\Phi,\Psi}$ は relative modular operator である。

また、一般の v.N. alg. $\mathcal{N}$ に対して、次の事実がわかる。

(Lemma 10)

$\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ を $\mathcal{N}$ の σ_t^φ-不変な部分代数の増大 (resp. 減少) ネットとし、$\mathfrak{M} = \bigvee_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{M} = \bigcap_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$) とするとき、$E_\varphi(A|\mathfrak{M}) = \text{st-}\lim_\alpha E_\varphi(A|\mathfrak{M}_\alpha)$, $A \in \mathcal{N}$.

(Proof)

$\varphi(A) = \langle \Phi, A\Phi \rangle$ と書く。

$E_\varphi(A|\mathfrak{M}_\alpha)\Phi = P_\alpha A \Phi$.

$E_\varphi(A|\mathfrak{M})\Phi = PA\Phi$

$P_\alpha \longrightarrow P$ strongly。ここで Φ が $\mathcal{N}'$ に対して cyclic であることより。$E_\varphi(A|\mathcal{M}) = \text{s-}\lim_\alpha E_\varphi(A|\mathcal{M}_\alpha)$ ■

有限次元の V.N. 部分代数の増大ネット $\{\mathcal{N}_\alpha\}$ によって，$\mathcal{N} = \bigvee_\alpha \mathcal{N}_\alpha$ となるとき．

(Theorem 11)

上の $\mathcal{N}$ に対して，ネット $\{\mathcal{M}_\alpha\}$ を，$\sigma_t^\varphi(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{M}_\alpha$，$\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{N}_\alpha$ と定めるとき，もし，ある $\psi \in \mathfrak{S}$ に対して，$\{\psi_\alpha\} \subset \mathfrak{S}$ が存在して，$\|\psi_\alpha - \psi\|_{\mathcal{N}_\alpha} \to 0$ となり，且，$\mathcal{M}_\alpha$ が $\{\varphi, \psi_\alpha\}$ に対して十分であるならば，

$$\overline{\lim}\, \mathcal{M}_\alpha = \bigcap_\beta \bigvee_{\alpha \geq \beta} \mathcal{M}_\alpha \text{ は } \{\varphi, \psi\} \text{ に対して十分である。}$$

(Proof)

$$\mathcal{M}_{(\beta)} \equiv \bigvee_{\gamma \geq \beta} \mathcal{M}_\gamma, \quad \mathcal{M}_{(\beta,\alpha)} \equiv \bigvee_{\beta \leq \gamma \leq \alpha} \mathcal{M}_\gamma \text{ とおく．}$$

これらは σ_t^φ-不変 且．$\mathcal{M}_{(\beta,\alpha)} \uparrow \mathcal{M}_{(\beta)}$。

又．$\mathcal{M}_{(\beta,\alpha)} \supset \mathcal{M}_\alpha$ より．$\mathcal{M}_{(\beta,\alpha)}$ は $\{\varphi, \psi_\alpha\}$ に対して十分である。従って．

$$\psi_\alpha(A) = \psi_\alpha(E_\varphi(A|\mathcal{M}_{(\beta,\alpha)})), \quad A \in \mathcal{N}_\alpha, \quad \alpha \geq \beta.$$

ここで Lemma 10 を使って．

$$\psi(A) = \psi(E_\varphi(A|\mathcal{M}_{(\beta)})), \quad A \in \bigcup_{\alpha \geq \beta} \mathcal{N}_\alpha \text{ が示される。}$$

$\mathcal{N} = \bigvee_\alpha \mathcal{N}_\alpha$, $\quad \mathcal{M}_{(\beta)} \downarrow \overline{\lim} \mathcal{M}_\alpha$ より.

$$\psi(A) = \psi(E_\varphi(A | \overline{\lim_\alpha} \mathcal{M}_\alpha)) \quad , \quad A \in \mathcal{N}$$

となる。 ∎

(Theorem 12)

Theorem 11 と同じ条件の下で. $\mathcal{M}_\alpha \subset Z_\varphi^\alpha \equiv \{ A \in \mathcal{N}_\alpha \mid \varphi(AB) = \varphi(BA) , B \in \mathcal{N}_\alpha \}$ のとき. 次の (a) 又は (b) の条件が満たされるならば. $\overline{\lim} \mathcal{M}_\alpha$ は $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分である。

(a) $\{\psi_\alpha\}$ が存在して. $\| \psi - \psi_\alpha \|_{\mathcal{N}_\alpha} \to 0$ 且

$$S_{\mathcal{N}_\alpha}(\psi_\alpha | \varphi) - S_{\mathcal{M}_\alpha}(\psi_\alpha | \varphi) \longrightarrow 0 .$$

(b) $S_{\mathcal{N}_\alpha}(\psi | \varphi) - S_{\mathcal{M}_\alpha}(\psi | \varphi) \longrightarrow 0 .$

(Proof)

(b) $\Rightarrow$ (a) は trivial.

よって (a) のとき結論を示す。

$\psi_\alpha'(A) \equiv \psi_\alpha(E_\varphi(A | \mathcal{M}_\alpha))$, $A \in \mathcal{N}$ とおく.

Theorem 8 より.

$$\| \psi_\alpha' - \psi_\alpha \|_{\mathcal{N}_\alpha} \leq \{ 2 (S_{\mathcal{N}_\alpha}(\psi_\alpha | \varphi) - S_{\mathcal{M}_\alpha}(\psi_\alpha | \varphi)) \}^{1/2} \longrightarrow 0$$

$$\therefore \| \psi_\alpha' - \psi \|_{\mathcal{N}_\alpha} \leq \| \psi_\alpha' - \psi_\alpha \|_{\mathcal{N}_\alpha} + \| \psi_\alpha - \psi \|_{\mathcal{N}_\alpha} \longrightarrow 0$$

従って. $\psi_\alpha'(A) = \psi_\alpha(E_\varphi(A | \mathcal{M}_\alpha)) = \psi_\alpha'(E_\varphi(A | \mathcal{M}_\alpha))$

$\therefore$ $\mathcal{M}_\alpha$ は $\{\varphi, \psi_\alpha'\}$ に対して十分である。

よって Theorem 11 より．$\overline{\lim}\, \mathcal{M}_\alpha$ は $\{\varphi, \psi\}$ に対して十分である。■

(Corollary 13)

(a) $S_{\mathcal{M}_\alpha}(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}_\alpha \cap Z_\varphi}(\psi|\varphi) \to 0$

$\Longrightarrow \quad \psi \in I(\varphi)$

(b) $S_{\mathcal{M}_\alpha}(\psi|\varphi) - S_{\mathcal{M}_\alpha \cap Z}(\psi|\varphi) \to 0$

$\Longrightarrow \quad \psi \in K(\varphi)$

こうして．我々は．十分性の概念が K.M.S. 状態．時間不変な状態の特徴付けに有用であることを見．Relative Entropy と状態との間の新らたな不等式を通して．十分性と Relative Entropy 自身の関連を示すことができた。最後に．Theorem 10 ～ 12 の結果は．数理統計における．近似十分性の概念の非可換への拡張を目ざすことによって得られたものであることに注意しよう。ここでの結果の，より完全な議論と．他の分野との係りについては．preprint. "Sufficient, KMS condition and Relative Entropy in von Neumann algebras" (Research Reports on Information Sciences. No A-62, 1979) を参照していただきたい。

REFEREMCES

[1] H. Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1976), 809-833.

[2] I. Csiszár, Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations, Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967), 299-318.

[3] N. Dang-Ngoc, Pointwise convergence of martingales in von Neumann algebras, Preprint.

[4] H. A. Dye, The Radon-Nikodým theorem for finite rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 243-280.

[5] S. Gudder and J.-P. Marchand, Noncommutative probability on von Neumann algebras, J. Math. Phys. 13 (1972), 799-806.

[6] R. Haag, N. M. Hugenholtz and M. Winnink, On the equilibrium states in quantum statistical systems, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 215-236.

[7] P. R. Halmos and L. J. Savage, Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, Ann. Math. Statistics 20 (1949), 255-241.

[8] R. Kubo, Statistical mechanical theory of irreversible processes I, J. Phys. Soc. Japan 12 (1957), 570-586.

[9] H. Kudo, On an approximation to a sufficient statistic including a concept of asymptotic sufficiency, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I 17 (1970), 273-290. See also ibid. Sec. I 22 (1975), 449.

[10] ———, A note on the strong convergence of σ-algebras, Ann. Probability 2 (1974), 76-83.

[11] S. Kullback and R. A. Leibler, On information and sufficiency, Ann. Math. Statistics 22 (1951), 79-86.

[12] T. Kusama, On approximate sufficiency, Osaka J. Math. 13 (1976), 661-669.

[13] G. Lindblad, Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems, Commun. Math. Phys. 39 (1974), 111-119.

[14] P. C. Martin and J. Schwinger, Theory of many-particle systems I, Phys. Rev. 115 (1959), 1342-1373.

[15] G. K. Pedersen and M. Takesaki, The Radon-Nikodym theorems for von Neumann algebras, Acta Math. 130 (1973), 53-87.

[16] S. Sakai, C^*-Algebras and W^*-Algebras, Springer, Berlin, 1971.

[17] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. Math. 57 (1953), 401-457.

[18] M. Takesaki, Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications, Springer, Lecture notes in math. Vol. 128, 1970.

[19] ——————, Disjointness of the KMS-states of different temparatures, Commun. Math. Phys. 17 (1970), 33-41.

[20] ——————, Conditional expectations in von Neumann algebras, J. Functional Analysis 9 (1972), 306-321.

[21] J. Tomiyama, On the projection of norm one in W*-algebras, Proc. Japan Acad. 33 (1957), 608-612.

[22] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, Tôhoku Math. J. 6 (1954), 177-181.

[23] ——————, Conditional expectation in an operator algebra, II, Tôhoku Math. J. 8 (1956), 86-100.

[24] ——————, Conditional expectation in an operator algebra, III, Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959), 51-64.

[25] ——————, Conditional expectation in an operator algebra, IV (entropy and information), Kōdai Math. Sem. Rep. 14 (1962), 59-85.